

# Apuntes sobre teoría de Elasticidad

*Relaciones de elasticidad. La teoría de elasticidad. Esfuerzos planos.*

## Relaciones de elasticidad

Estas apreciaciones toman como referencia el siguiente trabajo.

Sia Nemat-Nasser (University of California, USA) and Muneo Hori (University of Tokyo, Japan). *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. Part 2: Introduction to basic elements of Elasticity Theory.* Elsevier Science B. V. Amsterdam, The Netherlands, 1999.

La Teoría de Elasticidad no es la explicación física de la elasticidad. Estudia la *respuesta* de un *modelo de material* llamado *sólido elástico* al ser aplicadas cargas o imponerse desplazamientos superficiales.

Por *respuesta* se entiende alguno de los siguientes campos: campo de esfuerzos, campo de deformaciones unitarias, campo de los desplazamientos. Se expresan como juego de funciones de posición y tiempo en términos de *fuerzas internas*, *deformaciones locales* y *desplazamiento de partículas*.

La Teoría de Elasticidad es una teoría del *medio continuo*. Por *fuerzas internas* no se entienden fuerzas atómicas, moleculares o aún entre cristales. Se trata de fuerzas entre *elementos macroscópicos* con dimensiones pequeñas en relación con aquellas típicas del sólido considerado, pero grandes en comparación con las dimensiones típicas de los cristales. Los términos *deformaciones locales* y *desplazamientos de partículas* están referidos a estos *elementos macroscópicos*.

Debido a la complejidad de los materiales reales, expresable en un amplio rango de propiedades, los intentos de estudio las reducen en grupos organizados a través de *modelos* que describen el comportamiento de un *material ideal*.

La Teoría de Elasticidad trata como material ideal al *sólido perfectamente elástico*. Desde un *estado inicial* sin cargas ni fuerzas internas, llega a un *estado final* deformado por aplicación cuasi-estática de un juego de cargas. Se puede llegar al mismo estado final por diferentes juegos de cargas que hacen el mismo trabajo. Además, este trabajo es totalmente recuperado en cualquier retorno a su estado inicial por una lenta remoción de las cargas. Esta es la definición de un *sólido elástico ideal*.

Aunque no existen sólidos reales con este comportamiento, a muchos se les reconoce un *rango elástico* en donde se comportan *esencialmente* de la manera descrita. Este rango varía según el material y las condiciones (en el caucho sin vulcanizar este rango llega las grandes deformaciones, en el acero sólo alcanza a las muy pequeñas). En este último caso, el más común, se ha encontrado que la deformación crece de manera proporcional a la carga. La *teoría clásica de elasticidad lineal* trata con una relación lineal homogénea entre esfuerzos y muy pequeñas deformaciones unitarias.

Se reconocen las siguientes relaciones de elasticidad:

- Geométricas: tri y bi dimensionales estudiados con el auxilio del análisis vectorial o tensorial.

- Cinemáticas: entendiendo el movimiento de un sólido sin referencia a las fuerzas que causan el movimiento.
- Dinámicas: estudio de las fuerzas externas sin referencia al movimiento que producen.
- Constitutivas: caracterizan la constitución de los materiales que componen el sólido considerado.

## La teoría de elasticidad

### Referencia sobre elasticidad

Esta presentación toma como base la siguiente referencia:

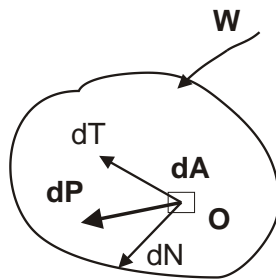
David Johnson (Nottingham Trent University). *Advanced structural mechanics*. Thomas Telford Publishing. London, UK. 2000.

### Alcances

En el contexto de un medio continuo, se estudia el comportamiento mecánico de un cuerpo sometido a cargas o sollicitaciones externas (no se consideran las llamadas *fuerzas de cuerpo*), cuyo material obedece a una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, consideradas éstas como pequeñas.

### Esfuerzos

El efecto de las cargas, representadas genéricamente con  $W$ , sobre un cuerpo, producen en una pequeña área  $dA$  de un punto  $O$ , una fuerza  $dP$ , la cual puede descomponerse en una fuerza normal  $dN$  y otra tangencial  $dT$ .



Los esfuerzos que relacionan a esta área con las fuerzas son el esfuerzo normal o directo,  $\sigma$ , y el esfuerzo de corte o tangencial,  $\tau$ , expresados de la siguiente manera:

### FUERZAS EN UN PUNTO DE UN CUERPO

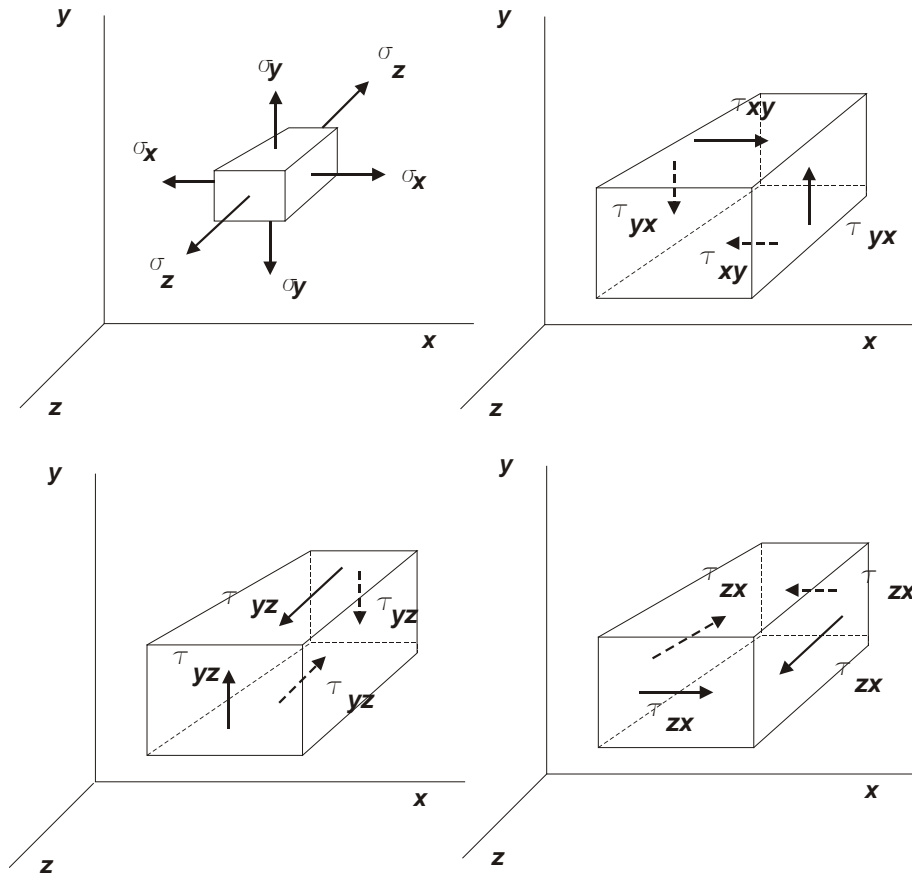
$$\sigma = \lim_{dA \rightarrow 0} \left( \frac{dN}{dA} \right)$$

$$\tau = \lim_{dA \rightarrow 0} \left( \frac{dT}{dA} \right)$$

Cuando se toma un elemento en  $O$  de tamaño  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  y se le refiere a un sistema rectangular de coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se obtiene un juego de esfuerzos normales o directos, y otro de esfuerzos de corte o tangenciales. Seis esfuerzos normales  $\sigma$  (tres pares equilibrados) y doce esfuerzos de corte  $\tau$  (seis pares equilibrados). Sin embargo, por equilibrio de momentos se cumple en el primer diagrama de esfuerzos de corte:

$$-\tau_{xy}(dz dx)dy + \tau_{yx}(dz dy)dx = 0$$

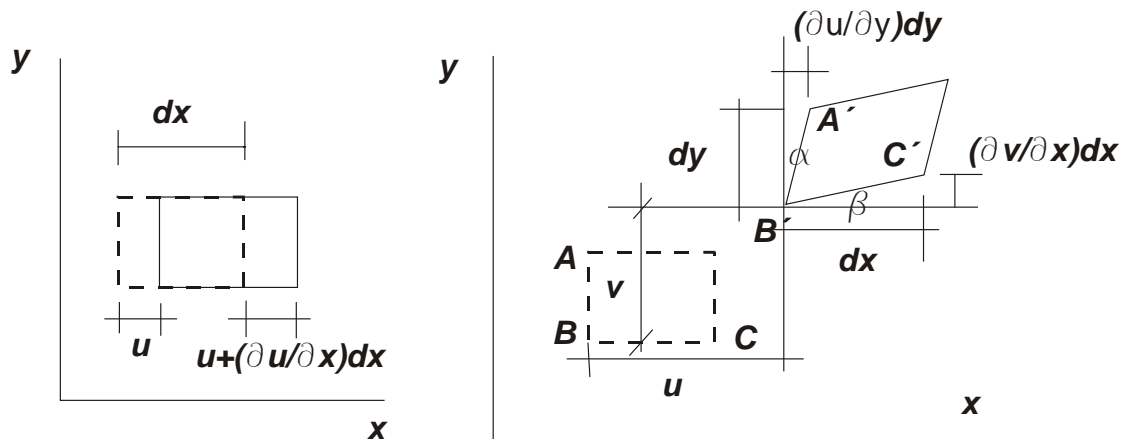
Con lo cual se cumple:  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . E igualmente para los otros pares según se indica en la figura.



**ESFUERZOS NORMALES Y DE CORTE EN EL ELEMENTO  $dx, dy, dz$**

**Desplazamientos y deformaciones unitarias**

Los componentes de desplazamientos que definen las deformaciones en un punto del cuerpo, se designan con  $u, v, w$  en correspondencia a los ejes  $x, y, z$  respectivamente. A estos desplazamientos se asocian deformaciones unitarias tanto directas o longitudinales (en la dirección de cada eje) como de corte o angulares.



**DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS**

Así, considérese un elemento  $dx, dy$ . Un desplazamiento longitudinal  $u$  en el inicio, se incrementa progresivamente hasta  $(\partial u / \partial x) dx$  en la longitud del elemento, siendo la deformación unitaria longitudinal (directa) igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{(\partial u / \partial x) dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Y en consecuencia  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$   $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

También para la deformación unitaria de corte, tomando en cuenta ángulos pequeños:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{(\partial u}{\partial y}) dy}{dy} + \frac{(\partial v}{\partial x}) dx}{dx}$$

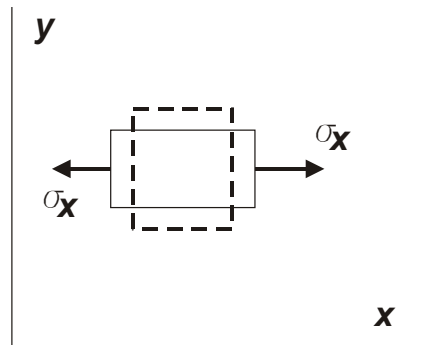
O bien, y por similitud:  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

## Esfuerzos y deformaciones unitarias

Al actuar directamente el esfuerzo, por ejemplo en la dirección  $x$ , produce



una deformación unitaria (directa) en la misma dirección obedeciendo una relación lineal que se conoce como *Ley de Hooke*.  $E$  es conocido como el *módulo de Young* o *módulo de elasticidad*.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

## DEFORMACIÓN DIRECTA Y EFECTO DE POISSON

*Poisson*, que en el caso del concreto es muy pequeño, en la forma:

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

En el caso tridimensional, el efecto se extiende en todas las direcciones conduciendo a las expresiones siguientes válidas para un material homogéneo e isotrópico:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z)$$

Igualmente, para el caso de esfuerzos y deformaciones unitarias de corte, con  $G$  como *módulo de corte* o *módulo de rigidez*.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

Los tres parámetros  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  se encuentran relacionados:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Deduciendo los esfuerzos a partir de las deformaciones se tiene:

$$\sigma_x = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_y + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_z \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_z \right]$$

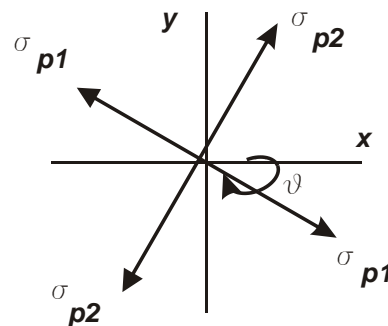
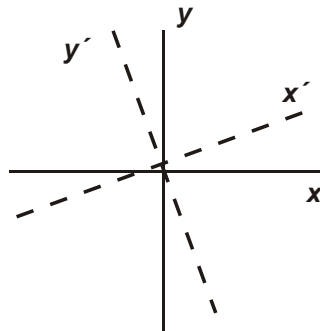
$$\sigma_z = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varepsilon_y + \varepsilon_z \right]$$

E igualmente:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

## Esfuerzos planos

En un punto determinado para una placa libre de esfuerzos en sus caras, los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y los desplazamientos  $u$ ,  $v$  constituyen el problema general de esfuerzos planos. Sus valores dependen de la elección de los ejes de coordenadas,  $x$ ,  $y$ . Al girar los ejes, variarán también los valores de los esfuerzos hasta un grado en que el valor del esfuerzo cortante sea cero. El otro par de esfuerzos se conocen como *esfuerzos principales*.



### ESFUERZOS PRINCIPALES

El ángulo de los esfuerzos principales y su solución son:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \quad \theta_1 = \theta \quad \theta_2 = \theta + 90^\circ \quad -45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$$

Los esfuerzos principales están conformados por el más grande y el más pequeño de los esfuerzos que actúan en el punto:

$$\sigma_{p1,2} = \sigma_x \cos^2 \theta_{1,2} + \sigma_y \sin^2 \theta_{1,2} - \tau_{xy} \sin 2\theta_{1,2}$$

## Condiciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento del material

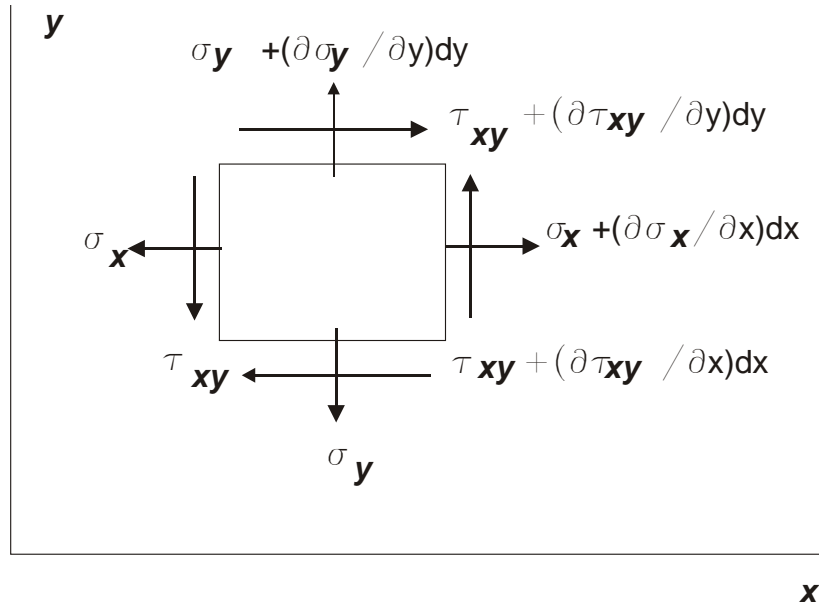
Las siguientes condiciones se expresan para un elemento  $dx$ ,  $dy$ ,  $t$ . La solución del problema de esfuerzos planos requiere de su cumplimiento.

### ◆ Condiciones de equilibrio

Considérense las variaciones de los esfuerzos en forma similar a la de las deformaciones según se representa en la figura.

La expresión para el equilibrio horizontal:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)(t dy) - \sigma_x(t dy) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right)(t dx) - \tau_{xy}(t dx) = 0$$



### VARIACIÓN DE ESFUERZOS

Lo que conduce, y también por similitud, a las **ecuaciones de equilibrio**:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

#### ◆ Condiciones de compatibilidad

Según se expresó:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

De donde:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

De donde se expresa la siguiente **ecuación de compatibilidad**:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

#### ◆ Comportamiento del material

Según las relaciones de elasticidad lineal, estas son las ecuaciones del **comportamiento del material**:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu \sigma_x + \sigma_y) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Que también pueden resolverse en términos de los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E(1 - \nu)}{2(1 - \nu^2)} \gamma_{xy}$$

Donde, también se conoce que:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Reemplazando las ecuaciones del comportamiento del material en la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \left( -\nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Pero, de las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

De donde:  $2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$

Reemplazando:

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \left( -\nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) = -(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

Simplificando, resulta:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = -\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

O también, con el auxilio del operador de Laplace:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Que expresa **la condición del material que incorpora las condiciones de compatibilidad**.

## Trabajo virtual

Por ser de interés en las aplicaciones de la teoría de elasticidad, se calcula el trabajo virtual interno. Antes se presenta el principio del trabajo virtual que orienta este cálculo.

### ◆ Sobre el principio del trabajo virtual

Según es tomado de la siguiente referencia.

M: S: El Naschie. *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited. London, 1990.

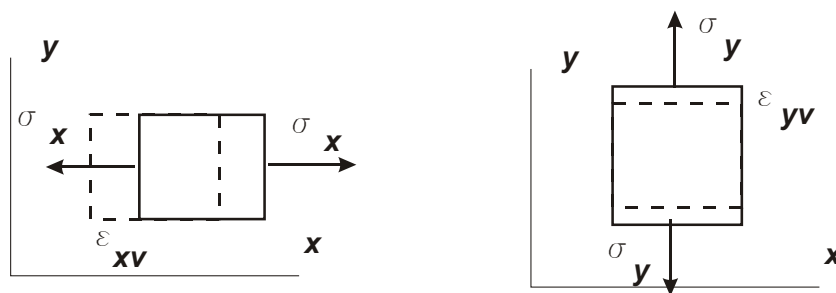
Un principio o axioma es una proposición no puede ser expresada en forma más simple. No puede ni necesita ser probada. Por ejemplo, la condición de equilibrio de fuerzas o momento. Es también el caso del trabajo virtual (el producido por una carga constante por un pequeño desplazamiento arbitrario).

**Axioma:** *Un sistema mecánico está en equilibrio si la suma de todos los trabajos hechos por todas las fuerzas aplicadas e internas es cero para todo desplazamiento virtual.*

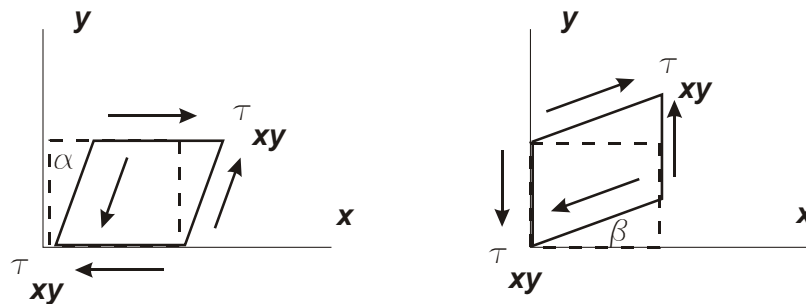
$$\sum W_v = W_{in,v} + W_{ex,v} = 0$$

El desplazamiento virtual es arbitrario y muy pequeño, cinemáticamente admisible y compatible con las condiciones de frontera. No debe ser confundido con el producido por una carga actuando en una estructura.

◆ Sobre el trabajo virtual interno



**DEFORMACIÓN VIRTUAL DIRECTA**



**DEFORMACIÓN VIRTUAL ANGULAR**

Los resultados son referidos a un elemento  $dx$ ,  $dy$ ,  $t$  con un volumen  $v$ . Las deformaciones unitarias virtuales son  $\epsilon_{xv}$ ,  $\epsilon_{yv}$ ,  $\gamma_{xyv} = \alpha + \beta$ .

El trabajo interno virtual directo es:  $(\epsilon_{xv} dx)(\sigma_x(dy t)) + (\epsilon_{yv} dy)(\sigma_y(dx t))$

$$\epsilon_{xv} \sigma_x (dx dy t) + \epsilon_{yv} \sigma_y (dx dy t) = (\epsilon_{xv} \sigma_x + \epsilon_{yv} \sigma_y) dv$$

El trabajo interno virtual angular es:

$$\tau_{xy} (t dx)(\alpha dy) + \tau_{xy} (t dy)(\beta dx) = \tau_{xy} \alpha dv + \tau_{xy} \beta dv$$

O bien:

$$\tau_{xy} (\alpha + \beta) dv = \tau_{xy} \gamma_{xyv} dv$$

Por lo que el trabajo interno virtual total es:

$$(\epsilon_{xv} \sigma_x + \epsilon_{yv} \sigma_y + \tau_{xy} \gamma_{xyv}) dv$$

**Solución por la función de esfuerzos,  $\Phi$**

El problema de esfuerzos planos requiere resolver seis ecuaciones con seis incógnitas:

- Dos ecuaciones de equilibrio.
- Una ecuación de compatibilidad.
- Tres ecuaciones del comportamiento del material.
- Además, cumplir con las condiciones de frontera.

Se introduce la **función de esfuerzos  $\Phi$** , tal que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Aplicada a la *condición del material que incorpora las condiciones de compatibilidad*, se obtiene la **ecuación general de esfuerzos planos, en base a la función de esfuerzos**.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4 \varphi = 0$$

Resolviendo la ecuación general que satisfaga las condiciones de frontera, la expresión de  $\Phi$  permite encontrar los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Con las ecuaciones de comportamiento del material se calculan las deformaciones unitarias  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . Por integración, se obtienen los desplazamientos  $u$ ,  $v$ .

Los métodos de posibles soluciones son:

- Aproximar  $\Phi$  a una expresión polinómica.
- El método de diferencias finitas.
- El método de elementos finitos.